

ANALISIS FUNGSI ENERGI DAN GELOMBANG UNTUK POTENSIAL MANNING ROSEN DIMENSI-D

Suparmi, Cari, Luqman H*

Program Pascasarjana Ilmu Fisika, Universitas Sebelas Maret
Surakarta 57126

*E-mail: luqman_812_h@yahoo.com

Abstrak

Pendekatan analisis persamaan Schrödinger dimensi-D untuk potensial non sentral Manning Rosen diselidiki dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Pendekatan ini digunakan untuk memperoleh nilai fungsi energi dari potensial Manning Rosen dimensi-D dengan pendekatan parameter Nikiforov-Uvarov. Fungsi gelombang radial dimensi-D potensial Manning Rosen diperoleh dengan bentuk umum Polinomial Jacobi.

Kata kunci : fungsi energi, fungsi gelombang, metode Nikiforov-Uvarov, persamaan Schroodinger dimensi-D, potensial Manning Rosen

PENDAHULUAN

Mekanika kuantum selalu menggunakan pendekatan yang berbeda untuk menentukan besaran yang terkait dengan gerak partikel yaitu menggunakan fungsi gelombang untuk mempresentasikan dinamika partikel yang bergerak yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger dari partikel yang berkaitan. Persamaan Schroodinger merupakan persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan keadaan kuantum dari sistem fisis (Suparmi, 2011).

Penyelesaian persamaan Schrödinger secara eksak pada beberapa potensial dapat diaplikasikan dalam sistem fisika yang sangat penting karena dapat digunakan untuk menentukan fungsi gelombang dan tingkat energi suatu sistem partikel (Antia et al., 2010).

Beberapa metode dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schroodinger, antara lain SUSY (Feizi et al., 2011), Pendekatan WKB (Cari et al., 2012), Romanovsky (Yanuarief, 2012), dan Nikiforov-Uvarov (Ikhdair et al., 2007). Metode yang sering digunakan saat ini adalah metode Nikiforov-Uvarov karena cenderung lebih mudah dibandingkan dengan metode yang lain. Potensial dalam kuantum menggambarkan dinamika partikel di mekanika kuantum.

Beberapa contoh potensial dalam mekanika kuantum antara lain potensial Coloumb, Rosen Morse, Manning-Rosen, Scarf, Poschl Teller Eckart dan lain-lain.

TEORI

A. Persamaan Schrodinger Dimensi-D

Persamaan Schroodinger dimensi-D didasari dengan penggunaan koordinat polar dimensi-D dengan variabel polar r (*hyper radius*) dan variabel momentum sudut $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \dots, \theta_{D-1}, \phi$ (*hyper angle*), dan operator Laplacian dalam koordinat polar $r, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \dots, \theta_{D-1}, \phi$ untuk R^D didefinisikan sebagai (Hassanabadi et al., 2011):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_D^2 \Psi(r, \Omega_D) + V(r, \Omega_D) \Psi(r, \Omega_D) = E \Psi(r, \Omega_D) \quad (1)$$

dengan

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\Lambda_D^2(\Omega_D)}{r^2} \quad (2)$$

Dimana $\Lambda_D^2(\Omega_D)$ adalah operator momentum angular dimensi-D dengan:

$$\Lambda_D^2(\Omega_D) = L_k^2 = \sum_{a < b=2}^{k-1} L_{ab}^2 = -\frac{1}{\sin^{k-1} \theta_k} \left(\sin^{k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) + \frac{L_{D-1}^2}{\sin^2 \theta_k} \quad (3)$$

dimana $2 \leq k \leq D-1$ dan $L_1^2(\Omega_D) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}$

Persamaan bagian sudut harus memenuhi nilai eigen

$$\Lambda_D^2 Y(\Omega_D) = l(l + D - 2)Y(\Omega_D) \quad (4)$$

B. Potensial Manning Rosen

Potensial yang belum terselesaikan dalam persamaan Schrodinger dimensi-D salah satunya adalah potensial Manning Rosen. Potensial Manning Rosen adalah model potensial yang digunakan untuk menerangkan tingkah laku getaran molekul antar atom (Cari & Suparmi, 2012). Potensial Manning Rosen secara matematis dituliskan sebagai :

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\nu(\nu-1)}{\sinh^2 r} - 2q \coth r \right) \quad (5)$$

Potensial Manning Rosen disubsitusikan pada persamaan Schrodinger dimensi-D, setelah dilakukan pemisahan variabel, maka persamaan bagian radial adalah :

$$\frac{1}{R(r)} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) r^2 - \left(\frac{\nu(\nu-1)}{\sinh^2 r} - 2q \coth r + \varepsilon^2 \right) r^2 = l(l + D - 2) \quad (6)$$

C. Metode Nikiforov Uvarov

Metode Nikiforov Uvarov dikembangkan berdasarkan penyelesaian persamaan diferensial orde dua dengan menggunakan persamaan perantara hipergeometri yang dinyatakan sebagai:

$$\psi''(s) + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi'(s) + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0 \quad (7)$$

dimana $\sigma(s)$ dan $\bar{\sigma}(s)$ merupakan polinomial orde 2, $\bar{\tau}(s)$ adalah polinomial orde 1, dan $\psi(s)$ merupakan suatu fungsi dari hypergeometry.

Pemisahan variabel dimensi-D, yaitu $\Psi(r, \Omega_D) = R(r)Y(\Omega_D)$ dan selanjutnya disubsitusikan pada persamaan perantara hipergeometri, maka diperoleh persamaan tipe hipergeometri sebagai berikut:

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0 \quad (8)$$

Fungsi gelombang bagian pertama dinyatakan dalam:

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma} \quad (9)$$

Persamaan –persamaan yang digunakan untuk menentukan spektrum energi dan fungsi gelombang bagian kedua y_n adalah sebagai berikut :

$$\pi = \left(\frac{\sigma' - \bar{\tau}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \bar{\tau}}{2} \right)^2 - \bar{\sigma} + k\sigma} \quad (10)$$

$$\lambda = k + \pi' \quad (11)$$

Nilai k pada persamaan (11) diperoleh kondisi bahwa dibawah akar persamaan (10) merupakan polynomial berderajat dua dan juga bentuk kuadrat sempurna, sehingga diskriminan dari polynomial derajat dua adalah nol. Eigen nilai dari persamaan hipergeometri adalah:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'', n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

dengan

$$\tau = \bar{\tau} + 2\pi \quad (13)$$

Kondisi *bound state* dapat dipenuhi, maka dipilih harga τ dan nilai π , sehingga $\tau' < 0$. Fungsi gelombang bagian kedua dinyatakan dalam formula Rodrigues sebagai:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)] \quad (14)$$

Dengan B_n merupakan konstanta normalisasi dan fungsi bobot $\rho(s)$ memenuhi persamaan Pearson yang dinyatakan sebagai:

$$\frac{d}{ds} (\sigma(s) \rho(s)) = \tau(s) \rho(s) \quad (15)$$

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh persamaan Energi dan fungsi gelombang bagian radial dari potensial Manning Rosen dimensi-D dengan metode Nikiforov Uvarov. Langkah-langkah penelitian ini adalah:

1. Melakukan substitusi variabel yang sesuai agar persamaan Schrodinger dimensi-D menjadi bentuk persamaan perantara hipergeometri.
2. Menentukan parameter-parameter $\bar{\tau}$, σ dan $\bar{\sigma}$
3. Menentukan persamaan π
4. Menentukan harga k dari persamaan kuadrat sempurna (diskriminan persamaan kuadrat dalam akar pada penentuan nilai π adalah nol)
5. Menentukan nilai τ dan nilai λ
6. Mencari nilai energi dari potensial Manning Rosen dengan menyamakan nilai eigen dari λ (menyamakan λ dengan λ_n)
7. Membandingkan harga E_n yang sesuai dengan metode lain
8. Menentukan bagian pertama dari fungsi gelombang
9. Menentukan fungsi bobot $\rho(s)$
10. Menentukan bagian kedua dari fungsi gelombang
11. Menentukan fungsi gelombang lengkap dengan mengalikan fungsi gelombang bagian pertama dan kedua

HASIL DAN PEMBAHASAN

Potensial Manning Rosen disubstitusikan pada persamaan Schrodinger dimensi-D, kemudian setelah dilakukan separasi variabel dan pendekatan pemisalan diperoleh persamaan perantara hipergeometri dalam bentuk Nikiforov-Uvarov sebagai berikut:

$$\frac{d^2\chi(s)}{ds^2} - \frac{2s}{(1-s^2)} \frac{d\chi(s)}{ds} - \left[\frac{\left(l+\frac{D-1}{2}\right)\left(l+\frac{D-3}{2}\right)d_0}{(1-s^2)^2} - \frac{\left(l+\frac{D-1}{2}\right)\left(l+\frac{D-3}{2}\right)(1-s^2)}{(1-s^2)^2} - \frac{v(v-1)(1-s^2)}{(1-s^2)^2} - \frac{2qs}{(1-s^2)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(1-s^2)^2} \right] \chi(s) = 0 \quad (16)$$

Nilai energi dari potensial Manning Rosen pada dimensi D adalah:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\left\{ \sqrt{Qd_0 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^2}{\left\{ \sqrt{Qd_0 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^2 - Qd_0} \right] \quad (17)$$

$$\text{Dimana } Q = \left(l + \frac{D-1}{2}\right) \left(l + \frac{D-3}{2}\right)$$

Pada kondisi khusus ($l = 0$) dan ($D = 3$), diperoleh nilai energi sebesar:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ (v-1-n)^2 + \frac{q^2}{(v-1-n)^2} \right\} \quad (18)$$

yang sesuai dengan penelitian sebelumnya dengan menggunakan metode hipergeometri.

Fungsi gelombang lengkap diperoleh sebesar:

$$R_n = B_n r^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} (1 - \coth^2 r)^{\frac{p}{2}} (1 + \coth r)^{\frac{q}{2p}} (1 - \coth r)^{-\frac{q}{2p}} P_n^{\alpha, \beta}(\coth r) \quad (19)$$

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini sebagai studi awal dan syarat untuk mengajukan ujian tesis. Penulis menyampaikan terima kasih kepada Program Ilmu Fisika Universitas Sebelas Maret atas bantuan dalam studi.

DAFTAR PUSTAKA

- Antia, A.D., A.N. Ikot & L.E. Akpabio. 2010. Exact Solutions of The Schrödinger Equation with Manning-Rosen Potential Plus A Ring-Shaped Like Potential by Nikiforov-Uvarov Method. *European Journal of Scientific Research* 46: 107-118.
- Cari & Suparmi. 2012. Approximate Solution of Schrodinger Equation for Hulthen Potential plus Eckart Potential with Centrifugal Term in terms of Finite Romanovski Polynomials. *International Journal of Applied Physics and Mathematics* 2 (3).
- Cari, Suparmi, & H. Marini. 2012. Penentuan Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Morse dengan Koreksi Sentrifugal Menggunakan Metode SWKB dan Operator SUSY. *Indonesian Journal of Applied Physics* 2: 112-123.
- Feizi, H., A. A. Rajabi & M.R. Shojaei. 2011. Supersymetric Solution of The Schrodinger Equation for Woods-Saxon Potential by Using The Pekeris Approximation. *Physica Polonica B* 42 (10): 2143-2157.
- Hassanabadi, H., S. Zarrinkamar & Rajabi. 2011. Exact Solutions of D-Dimensional Schrodinger Equation for an Energi- dependent Potential by NU Method. *Commun. Theor. Phys* 55: 541-544.
- Ikhdaier, M. Sameer, R. Sever. 2007. Exact Solutions of the Modified Kratzer Potential Plus Ring-Shaped Potential in the D-dimensional Schrodinger Equation by the Nikiforov-Uvarof Method. *arxiv.org. PACS numbers: 03.6.-w; 03.65.Fd; 03.65.Ge.* : 1-16.
- Suparmi. 2011. *Mekanika kuantum II*. Surakarta : Jurusan Fisika Universitas Sebelas Maret
- Yanuarief, C. 2012. Analisis Energi dan Fungsi Gelombang Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Hulthen, Rosen-Morse dan Coulomb Menggunakan Polinomial Romavsky[thesis]. Surakarta : Program Studi Ilmu Fisika Pasca Sarjana UNS.